Áp dụng toán mệnh đề để giải bài toán lôgic

$1. Một số khái niệm và công thức trong toán mệnh đề

Mệnh đề toán học là loại mệnh đề chỉ có thể cho giá trị Đúng hoặc Sai. Khác với các loại mệnh đề văn học, chẳng hạn: “Ôi Tổ quốc giang sơn hùng vĩ!” (câu cảm thán), “Thầy Mậu ơi!” (câu gọi), “Gọi gì đấy?” (câu hỏi),…
Trong bài báo này ta gọi mệnh đề toán học đơn giản là mệnh đề và mã hóa giá trị Đúng là 1 và Sai là 0.

<u>Các phép toán mệnh đề cơ bản sau:</u>

1. Phép hội của hai mệnh đề: A và B, A and B, $A \wedge B$, ký hiệu là A.B hay AB hay
$\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$

$AB = 1 \leftrightarrow (A = 1$ và $B = 1)$ (đồng thời),
$A.B = 0 \leftrightarrow (A = 0$ hoặc $B = 0)$.

2. Phép tuyển của hai mệnh đề: A hoặc B, A or B, ký hiệu là $A \vee B$ hay $A + B$ hay
$\left[\begin{array}{l} A, \\ B. \end{array}\right.$

$A + B = 1 \leftrightarrow (A = 1$ hoặc $B = 1)$,
$A + B = 0 \leftrightarrow (A = 0$ và $B = 0)$ (đồng thời),

3. Phép hoặc loại trừ của hai mệnh đề: A hoặc loại trừ với B, A xor B, ký hiệu là $A \veebar B$.
$A \veebar B = 1 \leftrightarrow (A =1$ và $B = 0)$ hoặc $(A = 0$ và $B = 1)$, (A, B không cùng giá trị),
$A \veebar B = 0 \leftrightarrow (A =1$ và $B = 1)$ hoặc $(A = 0$ và $B = 0)$, (A, B cùng giá trị).

<u>Ví dụ:</u>
Một ông bố thấy cậu con trai có hai cô người yêu thì ra điều kiện: “Anh phải lấy một trong hai cô ấy, và chỉ một cô thôi!”. Néu anh ấy không lấy ai hay lấy cả hai cô là sai!

4. Phép kéo theo của hai mệnh đề: Nếu A thì B, if A then B, ký hiệu là $A \rightarrow B$ hay $A \Rightarrow B$.
$A \rightarrow B = 0 \leftrightarrow A = 1$ và $B = 0$,
$A \rightarrow B = 1 \leftrightarrow (A = 1$ và $B = 1)$ hoặc $(A = 0$ và $B = 0)$ hoặc $(A = 0$ và $B = 1)$.

<u>Ví dụ:</u>
Một anh cán bộ đang vận động bầu cử tuyên bố: “Nếu tôi được làm bộ trưởng, tôi sẽ thưởng cho anh em trong bộ tháng lương thứ 13”. Thế rồi anh ta lên làm bộ trưởng thật, nhưng không cho nhân viên lương tháng 13. Thế là anh ấy sai!

Nhà Toán học Fermat nói: “Cú n là số tự nhiên thì $F_n = 2^{2^n} +1$ là một số nguyên tố”. Mới đầu do tính bằng tay, ai cũng ngại, nên cứ cho là đúng. Mãi về sau: Tuy nhiên đến năm 1732, Euler đã phủ định dự đoán trên bằng cách chứng minh F_5 là hợp số. Sau đó, người ta còn thấy với là n = 5..9 là số tự nhiên thật, mà F_n = lại không phải là số nguyên tố. Do vậy Giả thuyết của ông Fermat không phải là định luật được!

5. Phép tương đương của hai mệnh đề: $A \leftrightarrow B$, chỉ đúng khi A và B cùng một giá trị:
$A \leftrightarrow B = 0 \leftrightarrow (A = 1$ và $B = 1)$ hoặc $(A = 0$ và $B = 0)$.

6. Phép phủ định của một mệnh đề: Phủ định của A, not(A), ký hiệu là $\overline{A}$.

Giá trị của $\overline{A}$ khác với A (đối kháng với nhau).

Chú ý:
Hai mệnh đề có giá trị ngược nhau gọi là **đối kháng**. Nhiều mệnh đề không cùng giá trị gọi là **bất đồng**.
Ví dụ:
A = “Cái bảng này mầu đen”, B = “Cái bảng này không đen” thì A và B là đối kháng.
Ví dụ: A = “Cái bảng này mầu đen”, B = “Cái bảng này mầu xanh” thì A và B là bất đồng.

Như vậy, ta có

Bảng giá trị các phép toán mệnh đề

A	B	A + B	A.B	$A \veebar B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A}$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0

Nhiều mệnh đề liên kết với nhau bởi [các] phép toán mệnh đề tạo thành **Biểu thức mệnh đề**.
Mệnh đề Y phụ thuộc vào một hay nhiều biến mệnh đề X_1, X_2,… gọi là một **Hàm mệnh đề**.
Hai mệnh đề nối với nhau bởi một dấu bằng gọi là một **Đẳng thức mệnh đề.**
Đẳng thức mệnh đề luôn đúng với mọi bộ giá trị các biến gọi là **Hằng đẳng thức mệnh đề**!

Ví dụ:
A = “x chia hết cho 3” là một hàm mệnh đề một biến.
B = “x + y là số nguyên chẵn” là một hàm mệnh đề hai biến.
$(A + B) \veebar (AB) \to (A \vee B)$ là một biểu thức mệnh đề.

Một số tính chất của các phép toán mệnh đề (Các hằng đẳng thức mệnh đề)

1. Tính giao hoán: a) A.B = B.A, (Giống số học)
b) A + B = B + A. (Giống số học)
2. Tính kết hợp: a) (A.B).C = A.(B.C),
b) (A + B) + C = A + (B + C). (Giống số học)
3. Tính phân phối: a) A.(B + C) = (A.B) + (A.C), (Giống số học)
b) A + (B.C) = (A + B).(A + C).
(Giống tập hợp: nếu coi . là giao, + là hợp, không giống số học)
4. Phần tử trung hoà: a) A.1 = 1.A = A,
b) A + 0 = 0 + A = A.
5. Luật khử: a) $A.\overline{A} = \overline{A}.A = 0$,
b) $A + \overline{A} = \overline{A} + A = 1$.
6. Luật nuốt: a) A + 1 = 1,
b) A.0 = 0.
**7. Luật lũy đẳng: ** a) A + A = A,
b) A.A = A.
8. Phủ định kép: $\overline{\overline{A}} = A$. (Phủ định của phủ định)
Ví dụ:
Không phải la anh không thích, có nghĩa là anh thích!

9. Luật De Morgan: a) $\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B}$,

b) $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Ví dụ :

Biện luận phương trình $(m^2 - 1)x = m + 1$.

Giải :

Nếu $m^2 - 1 \neq 0$ hay $(m \neq 1)$ và $(m \neq -1)$ thì phương trình có một nghiệm.

Trái lại, nếu m = 1 hoặc m = -1 thì ta xét cụ thể :

Với m = 1 thì phương trình trở thành 0x = 2, vô nghiệm

Với m = -1 thì phương trình trở thành 0x = 0, mọi x là nghiêm.

10. Chuyển đổi phép xor : $A \veebar B = \overline{A}.B + A.\overline{B}$.

Chứng minh:

A	B	$A \veebar B$	$\overline{A}.B + A.\overline{B}$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Rõ ràng hai vế luôn bằng nhau!

11. Chuyển đổi phép kéo theo: $A \rightarrow B = \overline{A} + B$.

Chứng minh:

A	B	$A \rightarrow B$	$\overline{A} + B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Rõ ràng hai vế luôn bằng nhau!

12. Chuyển đổi phép tkéo theo: $A \leftrightarrow B = A.B + \overline{A}.\overline{B}$.

Chú ý:

Có nhiều cách chứng minh hằng đẳng thức mệnh đề, nhưng cách lập bảng là hay được dùng.

Người ta đã chứng minh được rằng:

1. **Đại số Boole:**

Tập hợp $\mathcal{B} = \{0; 1\}$, cùng các phép toán hội, tuyển và phủ định $(1.1 = 1, 1 + 1 = 1, \overline{1} = 0, 1.0 = 0, 1 + 0 = 1, \overline{0} = 1, 0.1 = 0, 0 + 1 = 1, 0.0 = 0, 0 + 0 = 0)$ xác định trên $\mathcal{B}$ là một đại số. Đó là đại số Boole.

2. **Quy về ba phép toán có bản:**

Mọi biểu thức mệnh đề đề có thể viết lại dưới dạng chỉ gồm ba phép toán hội, tuyển và phủ định (dựa theo tính chất 10, 11 và 12).

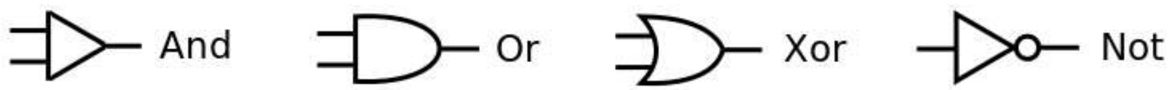
3. Biểu thức tường minh:

Nếu biết bảng giá trị của một biểu thức thì sẽ biết tường minh biểu thức đó. Cũng có thể nói rằng: Biết bảng giá trị của một hàm mệnh đề tức là tìm được hàm đó.

<u>Chú ý:</u>

Phép XOR (hoặc loại trừ $\veebar$) rất hay dùng nên các nhà điện tử, tin học đã thiết kế ra các con chíp cơ bản nhất AND, OR, XOR và NOT.

Sơ đồ mạch cơ bản (Đầu vào từ bên trái, Đầu ra bên phải): (Có sách dùng kí hiệu khác hơn!)



<u>Ví dụ 1:</u>

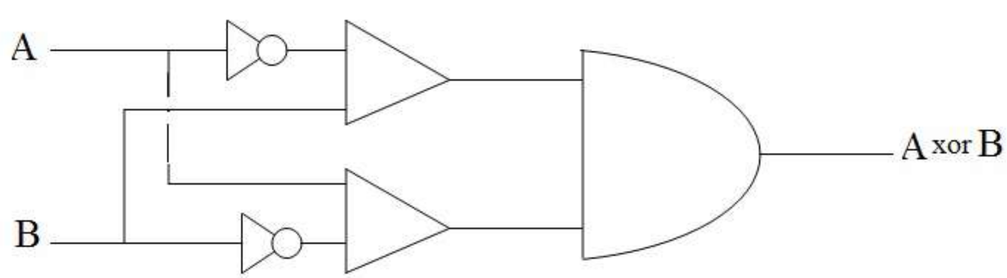
Từ bảng giá trị của một hàm hai biến A và B như dưới đây, tìm biểu thức tường minh f(A,B)?

A	B	f(A,B)	
0	0	0	
0	1	1	$\rightarrow \overline{A}.B$
1	0	1	$\rightarrow A.\overline{B}$
1	1	0	

Giải:

Xuất phát từ các số 1 đó suy ra các trường hợp đúng như trên, rồi lấy **tuyển** của các kết quả trung gian lại để được biểu thức tường minh $f(A,B) = \overline{A}.B + A.\overline{B} = A \veebar B$.

Sơ đồ nguyên lý của mạch Xor như sau:



Thực ra chỉ cần 3 con chíp And, Or và Not, nhưng trong thực tế có rất nhiều bài toán dẫn đến biểu thức Xor, nên người ta cũng làm một con Xor và liệt vào hàng cơ bản. Hơn thế nữa, người ta còn làm ra các con chip Nand phủ định của And, Nor phủ định của Or và Nxor phủ định của Xor nữa,…

Nếu không có Xor thì chíp cồng kềnh hơn. Nhưng nếu dùng chíp Xor thì với f(A,B) chỉ cần một con là đủ.

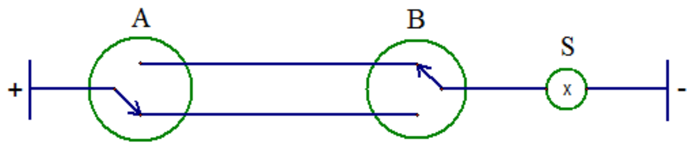
Với nguyên lý truy tìm biểu thức tường minh qua bảng giá trị chi tiết của một hàm mệnh đề thì với một linh kiện điện tử, sau khi đo, thử các đầu vào đầu ra, áp dụng phương pháp trên, rút gọn kết quả (nhờ các tính chất của các phép toán mệnh đề) ta có thể thiết kế được mạch điện tử tương ứng, và với nền công nghiệp phụ trợ phát triển sẽ sản xuất được các linh kiện.

Ví dụ 2.

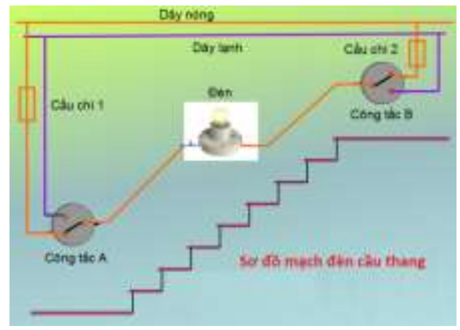
Thiết kế hai công tắc cầu thang A và B để khi đèn đang tối thì bật công tắc nào cũng sáng và đang sáng thì bật công tắc nào cũng tắt.

Giải:

Cách 1 (Điện kỹ thuật): Ngày trước chưa có điện tử thì người ta thiết kế như sau:



Sơ đồ nguyên lý hai công tắc cầu thang



Ở đây A và B là các công tắc "đổi pha" dễ dàng kiếm được.

Cách 2 (Điện tử): Ngày nay có toán mệnh đề và điện tử thì tương tự làm như ví dụ 1 ta có $S = A \veebar B$ và chỉ cần một con chíp XOR là đủ!

Giả sử một con chíp XOR như hình bên:

A XOR B

Ví dụ 3.

Tìm biểu thức mạch điện tử cho ba công tắc A, B và C cho một phòng lớn có ba cửa ra vào sao cho khi bật một trong ba công tắc thì đèn S đổi trạng thái.

Giải:

Bảng giá trị để tìm biểu thức của đèn S qua các biến A, B và C như sau:

A	B	C	S
0	0	0	0
1	0	0	$1 \rightarrow A.\overline{B}.\overline{C}$
0	1	0	$1 \rightarrow \overline{A}.B.\overline{C}$
0	0	1	$1 \rightarrow \overline{A}.\overline{B}.C$
1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	$1 \rightarrow A.B.C$

Từ bảng trên ta có

$$S = A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + A.B.C =$$

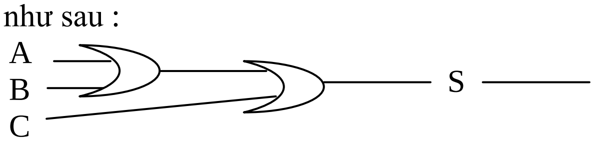
$$= (A.\overline{B} + \overline{A}.B).\overline{C} + (\overline{A}.\overline{B} + A.B).C$$

$$= (A \text{ xor } B)\,\overline{C} + \overline{A \text{ xor } B}\;C$$

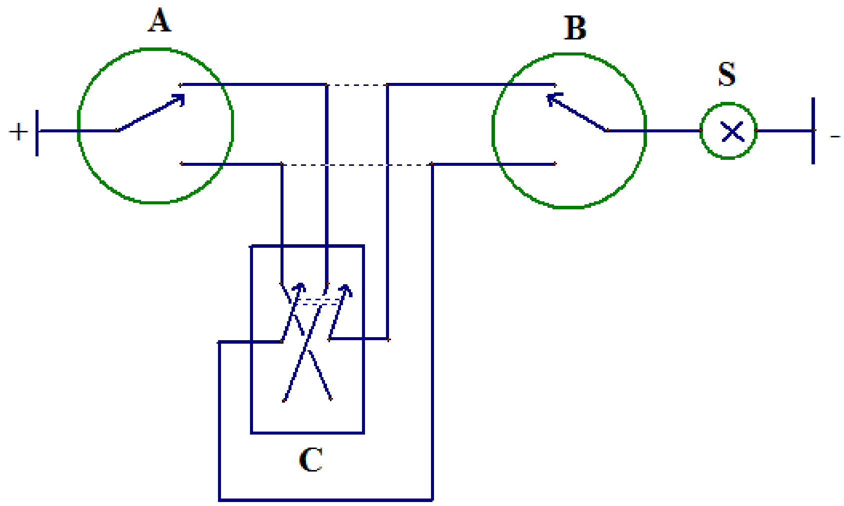
$$= (A \text{ xor } B) \text{ xor } C.$$

Như vậy ta chỉ cần dùng hai con chíp XOR thôi.

Ta nối như sau :



Còn nếu dùng điện kỹ thuật thì rất phức tạp: Tận dụng 2 công tắc A và B, bỏ đi hai đoạn thay vào đó để lắp thêm công tắc C chuyển mạch kép như hình vẽ dưới đây:



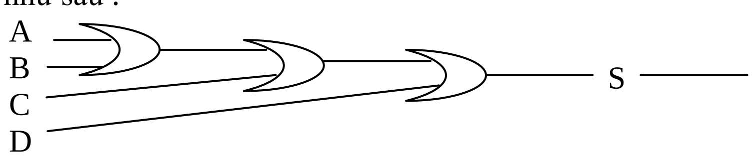
Ở công tắc C bật một nhát thì hai kim tiếp xúc xuống phía dưới hay lên trên (theo hình vẽ) một cách đồng thời. Hai kim đó cố kết với nhau và không truyền điện sang nhau!

Ví dụ 4.
Tìm biểu thức mạch điện tử cho bốn công tắc A, B, C và D cho một phòng lớn có bốn cửa ra vào sao cho khi bật một trong bốn công tắc thì đèn S đổi trạng thái. Khái quát hóa bài toán!

Giải:
Bằng cách lập bảng như trên ta cũng đi đến công thức

S = ((A xor B) xor C) xor D.

Ta nối như sau :



Bằng mạch điện tử, nối công tắc như thế, ta có thể giải quyết bài toán n công tắc (n>1).

Khái quát:
Mạch điện tử cho n công tắc A_1, A_2, …, A_n cho một phòng lớn có n cửa ra vào sao cho khi bật một trong n công tắc thì đèn S đổi trạng thái là

S_n = ((A_1 xor A_2) xor … A_{n-1}) xor A_n. (1)

Chứng minh (quy nạp)
1)- Rõ ràng (1) đúng với n = 2 (Xem ví dụ 3).
2)- Giả sử (1) đã đúng với n = k, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1.
Ta đã có

S_k = ((A_1 xor A_2) xor … A_{k-1}) xor A_k thỏa mãn bài toán.

Phải chứng minh công thức sau ũng thỏa mãn bài toán

S_{k+1} = ((A_1 xor A_2) xor … A_k) xor A_{k+1} thỏa mãn bài toán.

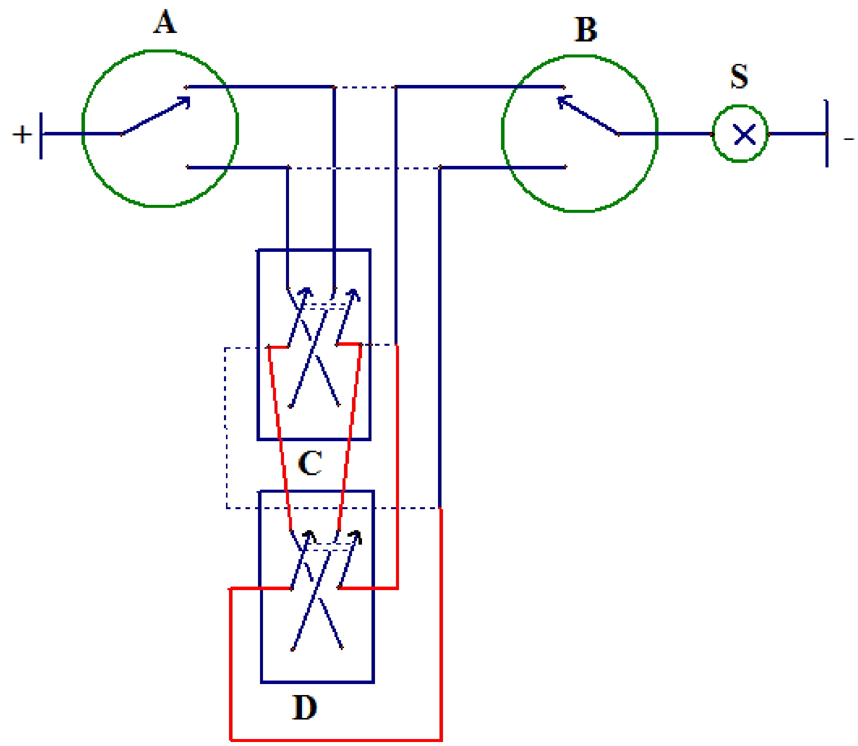
Ta sẽ chỉ ra là bật một công tắc i bất kỳ, $1 \leq i \leq k+1$ thì S_{k+1} đổi trạng thái.
Thật vậy:

- Nếu i ≤ k thì theo giả thiết S_k đổi trạng thái mà A_{k+1} vẫn chưa đổi trạng thái dẫn đến S_k xor A_{k+1} đổi trạng thái liền.

- Nếu i = k+1 thì do S_k không đổi trạng thái mà A_{k+1} đổi trạng thái dẫn đến S_k xor A_{k+1} đổi trạng thái liền.

Từ 1) và 2) suy ra Bài toán được chứng minh!

Còn nếu dùng điện kỹ thuật thì rất phức tạp. Nhưng trước đây người ta cũng đã có giải pháp rồi (Xem hình vẽ!).



Ví dụ 5.

Thiết kế phép cộng các bít (cộng nhị phân):

Như ta đã biết bảng cộng nhị phân:

0 + 0 = 0,	(Giống số học hệ thập phân)
0 + 1 = 1 + 0 = 1,	(Giống số học hệ thập phân)
1 + 1 = 10.	(Khác số học hệ thập phân)

Cũng giống như công các số ở các hệ đếm khác: "Cộng mấy với mấy được mấy nhớ mấy".

Với hệ nhị phân ta có bảng mẫu sau đây:

Đọc là cộng bít A với bít B, với với bít N cũ, được bít D và bít nhớ N mới.

Chẳng hạn cộng hai số nhị phân:

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\quad 110 \\ \hline 10011 \end{array}$$

(Thực hiện bằng tay như cộng số thập phân, chi khác la 1+1=10, được 0 nhớ 1, …)

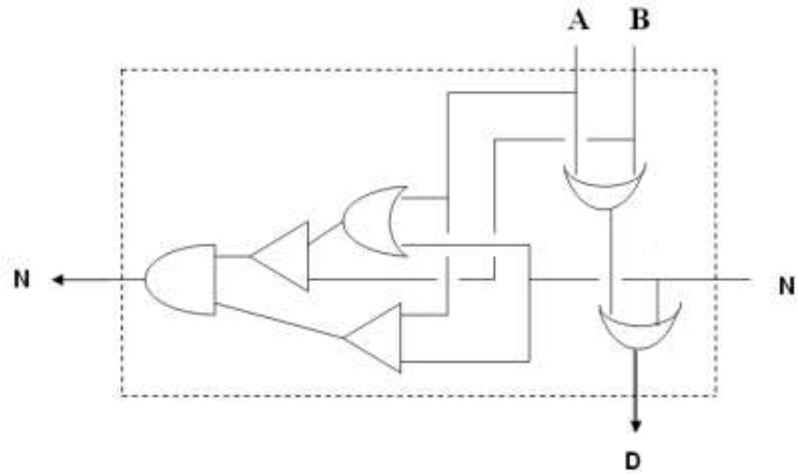
A	B	N	D	N
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Từ đầu vào (A,B,N) và đầu ra là (D,N).
Tính toán và rút gọn ta thu được:

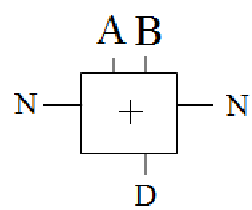
$$D = A\overline{B}\,\overline{N} + \overline{A}\,B\,\overline{N} + \overline{A}\,\overline{B}\,N + ABN = \ldots = (A \vee B) \vee N,$$

$$N = AB\overline{N} + \overline{A}\,B\,N + A\overline{B}\,N + ABN = \ldots = (A \vee N)B + AN,$$

Và con chip Cộng được hình thành:

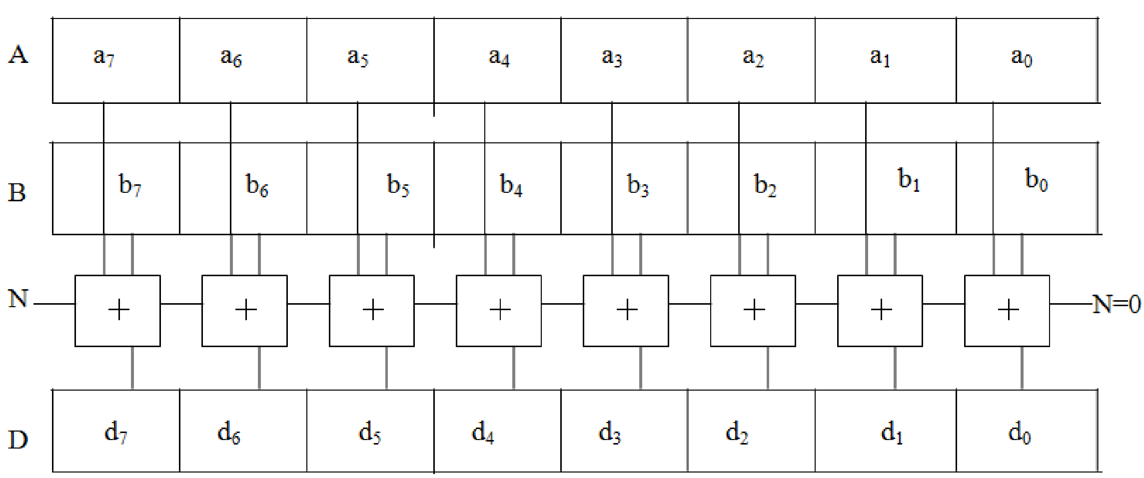


Ta thu nhỏ lại con chip Cộng thành



Ta cho bít A và B chạy từ trên xuống và bít nhớ vào N đi từ bên phải sang, bít nhớ ra ở bên trái, bít được xuống dưới để áp vào phép cộng tay như thường lệ cho "phải phép".
Thực ra trong thiết kế sơ khai của máy tính điện tử, hệ 8 bít thì phép cộng nhị phân 1101 với 110 phải hiểu là 00001101 + 00000110 = 00011011.

Quá trình cộng nhị phân 8 bít được mô phỏng qua sơ đồ sau:



Phép cộng bít được thực hiện lần lượt từ phải sang trái $a_i + b_i + N$ (vào) được d_i và nhớ N (ra), với i từ 0 đến 7. Bạn hãy tự kiểm nghiệm lại với các số nhị phân cụ thể: Cho các bít vào đúng các vị trí tương ứng của chúng và làm "như máy" !
Còn việc nhân các bít thì quá đơn giản, như nhân số học thập phân!

$2.- Một số bài tập lôgic giải bằng toán mệnh đề

Bài tập 1.

Trong một cuộc điều tra có 3 nhân chứng A, B và C cùng ngồi với nhau và nghe ý kiến của nhau. Cuối cùng ban điều tra hỏi lại từng người để tìm xem ai nói đúng. Kết quả là: A và B đối kháng nhau, B và C đối lập nhau và C thì bảo A và B đều nói sai. Vậy ban điều tra tin ai?

Giải:

Theo đầu bài ta có các đẳng thức sau:

$A.\overline{B} + \overline{A}.B = 1$ (1),

$B\overline{C} + \overline{B}C = 1$ (2),

$C.\overline{A}.\overline{B} + \overline{C}.A + \overline{C}.B = 1$ (3).

Nhân (1) và (2) ta thu được:

$(A\overline{B} + \overline{A}B).(B\overline{C} + \overline{B}C) = 1$,

$A.\overline{B}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.B.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{B}.C = 1$.

Ta có số hạng đầu và cuối bằng 0 (theo tính chất 5), B.B = B và $\overline{B}.\overline{B} = \overline{B}$ (tính chất 7), nên:

$A.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} = 1$. (4).

Nhân (3) và (4) và rút gọn được $\overline{A}.B.\overline{C} = 1$, tức là A sai, B đúng và C sai.

Tóm lại B là nhân chứng nói đúng!

Bài tập 2.

Có 2 làng A và B ở 2 bên đường. Dân làng A thi luôn nói thật, hỏi điều đúng thì gật đầu, sai thì lắc đầu. Dân làng B luôn nói dối, hỏi điều đúng thì lắc đầu, sai thì gật đầu. Một người khách lạ đến một trong hai làng đó, nhưng không biết mình đang ở làng nào, gặp một người dân, không biết dân làng nào, vì họ hay qua lại giữa hai làng. Người khách muốn hỏi chỉ một câu để người dân cứ gật đầu thì biết mình đang ở làng A, lắc thì biết mình đang ở làng B. Bạn hãy giúp người khách này với!

Giải:

Gọi X là câu hỏi: "Đây là làng A?", Y là câu hỏi: "Bạn là người làng A à?". Câu hỏi của người khách là một biểu thức tạo ra từ X và từ Y, và có bảng giá trị như sau:

X	Y	Q	(Câu hỏi)
1	1	1	(1) $\rightarrow$ Q = X.Y
1	0	0	(2)
0	1	0	(3)
0	0	1	(4) $\rightarrow Q = \overline{X}.\overline{Y}$

Ý nghĩa

(1): Nếu đang ở làng A và gặp dân làng A thì muốn người đó gật, ta phải hỏi câu đúng.
(2): Nếu đang ở làng A và gặp người dân làng B thì muốn người đó gật, ta phải hỏi câu sai.
(3): Nếu đang ở làng B và gặp người dân làng A thì muốn người đó lắc, ta phải hỏi câu sai.
(4): Nếu đang ở làng B và gặp người dân làng B thì muốn người đó lắc, ta phải hỏi câu đúng.

Từ bảng giá trị trên tìm được biểu thức tường minh của câu hỏi:

$Q = X.Y + \overline{X} . \overline{Y}$.

Câu hỏi tường minh là "(Đây là làng A) và (bạn là người làng A) à " hoặc "(Đây là làng B) và (bạn là người làng B) à ?".
Phối hợp cho gọn hơn, ta có:
Câu hỏi = "Bạn là người làng này à ?".
Hay "You are a citizent of this vilage à ?".
Nếu người đó gật đầu thì người khách biết mình đang ởlàng A,
Trái lại, thì biết mình đang ở làng B!

Tóm lại :

Có nhiều bài toán đố mẹo có thể dùng toán mệnh đề để tìm ra lời giải một cách chính xác. Tuy nhiên cũng không ít bài toán khó có thể đưa về toán mệnh đề được…

Phạm Đăng Long
lightsmok@gmail.com

Tài liệu tham khảo :

1. Sách hướng dẫn Toán rời rạc – Nguyễn Duy Phương – Học viện Bưu chính – Viễn thông Hà Nội.
2. Bảy phương pháp giải bài toán logic – Đặng Huy Ruận – Khoa Toán – Cơ học – Tin học – Trường Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội.
3. 80 Bài toán thông minh – Hàn Ngọc Đức (PDF) – Mạng Internet…
   Nguồn 1: 80 bài toán thông minh // Có lời giải - *VnMath* _MINH
   Nguồn 2 : http://hocmai.vn/file.php/408/Tu_duy_logic/80-BAI-TOAN-THONG-MINH_handuc_v2.pdf